I.C. para a diferença entre duas médias, μ_1-μ_2

- ***I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ quando σ_1 e σ_2 são conhecidos***:
  - *Teor*: O ***I.C. de 100γ% para $\mu_1 - \mu_2$*** quando ***σ_1 e σ_2 são conhecidos*** é dado por

$$\mu_1 - \mu_2 = \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm \Delta\,, \quad \Delta = \lambda \sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \lambda \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

sendo λ calculado a partir de γ da seguinte forma:

$$P\left(a \le \mu_1 - \mu_2 \le b\right) = \gamma \Leftrightarrow P\left(-\lambda \le Z \le \lambda\right) = \gamma$$

$$\boxed{Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}}$$

i) <u>Populações normais</u>:

$$\left(X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \quad \wedge \quad X_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)\right) \underset{TAN}{\Rightarrow} \quad Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

ii) <u>Grandes amostras e populações quaisquer</u>:

$$\left(n_1 \ge 30 \quad \wedge \quad n_2 \ge 30\right) \underset{TLC,\,TAN}{\Rightarrow} \quad Z \sim \mathrm{N}(0,1)$$

I.C. para a diferença entre duas médias, μ_1-μ_2

- ***I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ quando σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 = \sigma_2$) são desconhecidos***:
  - *Teor*: O ***I.C. de 100γ% para $\mu_1 - \mu_2$*** quando ***σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 = \sigma_2$) são desconhecidos*** é dado por

$$\mu_1 - \mu_2 = \left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right) \pm \Delta, \quad \Delta = \lambda S \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \quad S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

sendo λ calculado a partir de γ da seguinte forma:

$$P\left(a \le \mu_1 - \mu_2 \le b\right) = \gamma \Leftrightarrow P\left(-\lambda \le T \le \lambda\right) = \gamma$$

$$\boxed{T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}$$

i) <u>Populações normais</u>:

$$\left(X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \ \wedge \ X_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)\right) \ \Rightarrow \ T \sim \mathrm{T}\left(n_1 + n_2 - 2\right)$$

ii) <u>Grandes amostras e populações quaisquer</u>:

$$\left(n_1 \ge 30 \ \wedge \ n_2 \ge 30\right) \ \Rightarrow \ T \sim \mathrm{N}(0,1)$$

I.C. para a diferença entre duas médias, μ_1-μ_2

- ***I. C. para $\mu_1 - \mu_2$ quando σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) são desconhecidos***:
  - *Teor*: O ***I.C. de 100γ% para $\mu_1 - \mu_2$*** quando ***σ_1 e σ_2 ($\sigma_1 \neq \sigma_2$) são desconhecidos*** é dado por

$$\mu_1 - \mu_2 = \left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) \pm \Delta \quad , \quad \Delta = \lambda \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$$

sendo λ calculado a partir de γ da seguinte forma:

$$P\left(a \leq \mu_1 - \mu_2 \leq b\right) = \gamma \Leftrightarrow P\left(-\lambda \leq T \leq \lambda\right) = \gamma$$

$$\boxed{T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \left(\mu_1 - \mu_2\right)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}}$$

i) <u>Populações normais</u>:

$$\left(X_1 \sim \mathrm{N}\left(\mu_1, \sigma_1^2\right) \wedge X_2 \sim \mathrm{N}\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)\right) \Rightarrow T \sim \mathrm{T}(m), \quad m \cong \frac{\left(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(S_1^2/n_1\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(S_2^2/n_2\right)^2}{n_2 - 1}}$$

ii) <u>Grandes amostras e populações quaisquer</u>:

$$\left(n_1 \geq 30 \quad \wedge \quad n_2 \geq 30\right) \quad \Rightarrow \quad T \sim \mathrm{N}(0,1)$$

I.C. para a diferença entre duas proporções, $p_1 - p_2$

- ***I. C. para $p_1 - p_2$*:**
  - *Teor*: O ***I.C. de 100γ % para $p_1 - p_2$*** é dado por

$$p_1 - p_2 = \widehat{P}_1 - \widehat{P}_2 \pm \Delta \quad , \ \Delta = \lambda \sigma_{\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2} = \lambda \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$\cong \lambda \sqrt{\frac{\widehat{P}_1(1-\widehat{P}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{P}_2(1-\widehat{P}_2)}{n_2}}$$

sendo λ calculado a partir de γ da seguinte forma:

$$\boxed{(n_1 \geq 30 \wedge n_2 \geq 30) \underset{TLC}{\Rightarrow} Z \sim N(0,1)}$$

$$P(a \leq p_1 - p_2 \leq b) = \gamma \Leftrightarrow P(-\lambda \leq Z \leq \lambda) = \gamma \Leftrightarrow \Phi(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2}$$

$$\boxed{Z = \frac{\widehat{P}_1 - \widehat{P}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\widehat{P}_1(1-\widehat{P}_1)}{n_1} + \frac{\widehat{P}_2(1-\widehat{P}_2)}{n_2}}}}$$

Exercício

Numa amostra de 35 pessoas que tomaram o analgésico 1, a duração média do efeito do analgésico foi de 6.3 horas, com desvio padrão de 1.2 horas. Numa outra amostra de 30 pessoas, que tomaram o analgésico 2, a duração média do efeito foi 1.4 horas, com desvio padrão de 1.4 horas. Supondo que as duas populações são <u>normais e que têm a mesma variância</u>, determine um I.C. de 95% para a diferença da duração média do efeito dos dois analgésicos.

$\bar{X}_1$:"Duração ***média*** do efeito, em horas, numa ***amostra de 35 analgésicos 1***"

$\bar{X}_2$:"Duração ***média*** do efeito, em horas, numa ***amostra de 30 analgésicos 2***"

$$n_1 = 35 \quad ; \quad \bar{x}_1 = 6.3 \quad ; \quad s_1 = 1.2$$

$$n_2 = 30 \quad ; \quad \bar{x}_2 = 1.4 \quad ; \quad s_2 = 1.4$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2 \quad \therefore \quad S^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

$$P(a \le \mu_1 - \mu_2 \le b) = \gamma \Leftrightarrow P(-\lambda \le T \le \lambda) = \gamma \Leftrightarrow \Phi(\lambda) = \frac{1+\gamma}{2} \Leftrightarrow \Phi(\lambda) = \frac{1+0.95}{2} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}}$$

$$\boxed{(n_1 \ge 30 \wedge n_2 \ge 30) \Rightarrow T \sim \mathrm{N}(0,1)}$$

Exercício

$$\Leftrightarrow \quad \Phi(\lambda) = 0.975 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \Phi^{-1}(0.975) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1.96$$

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{34 \times 1.2^2 + 29 \times 1.4^2}{35 + 30 - 2} = 1.296^2$$

$$\Delta = \lambda s \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = 1.96 \times 1.296 \times \sqrt{\frac{1}{35} + \frac{1}{30}} = 0.63$$

$$IC_{\mu_1 - \mu_2}^{95\%} = [(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta, (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + \Delta] = [4.9 - 0.63, 4.9 + 0.63] = [4.27, 5.53]$$

Conclusão: Com um nível de confiança de 95%, pode afirmar-se que o analgésico 1 tem um efeito mais duradouro do que o analgésico 2.

Nota: Usando a distribuição T(n_1+n_2–2) = T(63) em vez de N(0,1), viria:

$$P(-\lambda \leq T \leq \lambda) = \gamma \;\Leftrightarrow\; P(T \leq \lambda) = F(\lambda) = \frac{1 + \gamma}{2} = 0.975 \;\Leftrightarrow\; \lambda = F^{-1}(0.975) = 1.998$$

$qt(0.975, 63)$

$$\Delta = 1.96 \times 1.998 \times \sqrt{\frac{1}{35} + \frac{1}{30}} = 0.64 \qquad \therefore \qquad IC_{\mu_1 - \mu_2}^{95\%} = [4.26, 5.54]$$